INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION — **MATHEMATIQUES**

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991 — (Option économique)

DUREE : 4 heures 30 - COEFFICIENT 8

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants.

PARTIE I : ANALYSE

EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par : $f(0) = 0$ et : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ pour $x \neq 0$

1 - Montrer que f est continue et dérivable en 0.

2 - Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

3 - Calculer $f'(x)$ pour x non nul et définir , pour $x \neq 0$, g par : $g(x) = x^2 f'(x)$.

4 - Etudier les variations de g sur $(\mathbf{R}_+)^*$ et montrer, en particulier, que g s'annulle pour une valeur α que l'on calculera à 10^{-3} près en indiquant soigneusement la méthode adoptée.

5 - En déduire le signe de $f'(x)$, le tableau de variation de f.

6 - Préciser la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine et tracer la représentation graphique de f.

EXERCICE 2

Pour chaque entier k positif, on définit une application f_k de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$ On note I_k l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,dx$

1 - Démontrer que la fonction $x \to \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est une primitive de la fonction :

$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ En déduire la valeur de I_0

2 - Calculer I_1

3 - Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a la relation : $kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$.
En déduire I_2 et I_3.

4 - Démontrer que :

$I_k \leq \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

A SUIVRE

PARTIE II : ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

On considère la matrice réelle d'ordre 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer M^2 , M^3

2 - Montrer qu'il existe a et b tels que $M^3 = aM^2 + bM$

3 - En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \geq 2$:

$$M^n = a_nM^2 + b_nM$$

4- En déduire M^6 et M^7. On écrira tous les éléments de ces matrices.

EXERCICE 2

Soit M la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 - Montrer que 0, 2, -2, 4, -4 sont des valeurs propres de M et trouver pour chacune d'elles les vecteurs propres associés.

2 - M est-elle diagonalisable ?

PARTIE III : PROBABILITES.

EXERCICE 1

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boules portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
.....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard, **sans remise**, un échantillon de 5 boules.
Quelle est la probabilité d'obtenir :

1 - Quatre boules portant le même numéro et une boule portant un autre numéro ?
2 - Trois boules portant le même numéro et deux boules portant le même numéro différent du précédent ?
3 - Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
4 - Deux boules portant le même numéro, deux boules portant le même numéro différent du précédent, et une boule portant encore un autre numéro ?
5 - Deux boules portant le même numéro et trois boules portant des numéros différents entre eux et différents du premier ?
6 - Cinq boules portant des numéros différents ?

Après avoir donné les valeurs exactes, **avec leurs justifications**, on donnera une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-4} près, dans un **tableau récapitulatif.**

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geq 0$ par :

$$f(t) = 9t\, e^{-3t}$$

1 - Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2 - Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.
3 - Démontrer l'existence et calculer la valeur de la variance de X.

FIN